МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра теоретической механики

Теорема Барбашина–Красовского в теории устойчивости механических систем

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель
А.В. Сахаров

МОСКВА
МФТИ
2022

УДК 531.011, 517.929.4, 517.933
ББК 22.213.17
Т11

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент Н.И. Амелькин

Теорема Барбашина–Красовского в теории устойчивости механических систем: учебно-методическое пособие по курсу *Аналитическая механика* / сост. А.В. Сахаров. – М.: МФТИ, 2022. – 20 с.

Одним из широко признанных методов исследования устойчивости положений равновесия механических систем является так называемый прямой метод Ляпунова. Однако не все положения равновесия могут быть исследованы исключительно классическими теоремами А.М. Ляпунова, известными науке с XIX века. В ряде случаев требуется применение более тонкой теоремы Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского. В учебной литературе данная теорема имеет ограниченное освещение. Данное пособие даёт необходимые сведения о сути теоремы Барбашина–Красовского и примеры её применения. Рекомендуется студентам, аспирантам и преподавателям, изучающим теорию устойчивости в рамках курса классической механики.

Содержание

1. Введение

Одним из важнейших вопросов, изучающихся в рамках классической механики, является вопрос об устойчивости движений динамических систем. Наиболее существенный вклад в развитие этой области внес А. М. Ляпунов (1857–1918). Первым (или обратным) методом Ляпунова исследования устойчивости называют метод, основанный на анализе линеаризованных уравнений движения. В основе этого метода лежит теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, утверждающая, что при выполнении определенных условий из асимптотической устойчивости или неустойчивости положений равновесия линеаризованной системы можно судить о наличии тех же свойств у положений равновесия исходной (нелинейной) системы. Однако в ряде случаев этот метод применить не удается. Другим подходом к исследованию вопроса об устойчивости является второй (или прямой) метод Ляпунова. Он основан на использовании дифференцируемых функций, называемых *функциями Ляпунова*, от фазовых переменных системы.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости — одна из самых популярных теорем этого метода. Тем не менее она требует выполнения весьма строгих ограничений, что зачастую затрудняет ее использование. Тогда на помощь может прийти теорема Барбашина–Красовского (в англоязычной литературе встречается название LaSalle's invariance principle), требующая выполнения менее строгих условий.

2. Приведение уравнений Лагранжа к нормальной форме Коши

Уравнения движения механической голономной системы могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа [2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q},$$

где $\boldsymbol{q} = [q_1, \ldots, q_n]'$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n]'$ — столбцы обобщенных координат и обобщенных скоростей системы (здесь и далее штрихом обозначается транспонирование), n — число степеней свободы, $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ — кинетическая энергия, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = [Q_1, \ldots, Q_n]'$ — обобщенные силы, действующие на систему.

Согласно основной теореме лагранжева формализма уравнения Лагранжа представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$. Следовательно, их можно представить в виде

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t).$$

При помощи перехода к фазовым переменным

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_{2n}]' = [q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n]'$$

эту систему можно привести к нормальной форме Коши:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t). \tag{1}$$

Пример. Движение линейного осциллятора в вязкой среде описывается уравнением

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0, \quad m, \beta, c = \text{const}.$$

Произведем замену $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$. Тогда уравнение переписывается в виде (1):

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{\beta x_2 + c x_1}{m}.$$

3. Устойчивость положений равновесия

Определение. Положение системы $\boldsymbol{q}^*$ называется *положением равновесия*, если функция $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^*$ является решением уравнений Лагранжа этой системы.

Без ограничения общности будем далее полагать, что исследуемое положение равновесия находится в точке $\boldsymbol{q}^* = 0$. Этого всегда можно добиться заменой $\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^*$, не изменяя при этом вид уравнений (1). Тогда в фазовых переменных покою системы в положении равновесия соответствует решение $\boldsymbol{x}(t) = 0$.

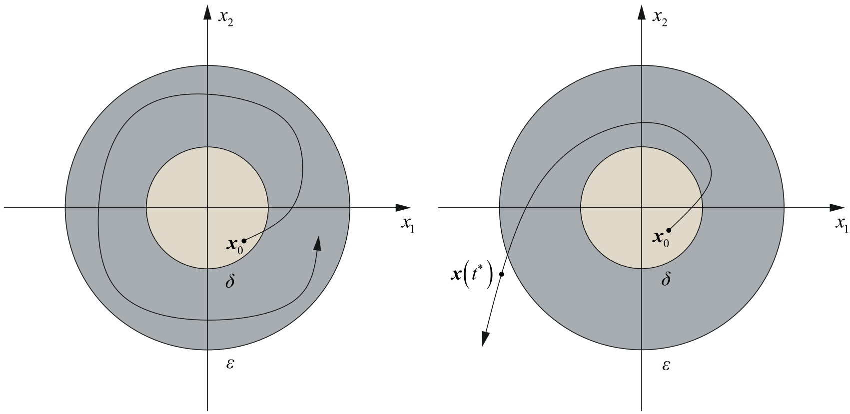

Рис. 1. Устойчивое (слева) и неустойчивое (справа) положения равновесия

Интуитивно ясно, что положения равновесия качественно отличаются друг от друга в зависимости от характера движения системы в их малой окрестности. Например, рассматривая одномерное движение точки в поле тяжести по некоторой гладкой кривой ее положением равновесия будет как локальный максимум этой кривой, так и локальный минимум. При этом в первом случае при малейшем приращении скорости точка удалится от своего положения равновесия, а во втором — может остаться вблизи его, если это приращение было достаточно мало.

Решение системы (1) при начальных условиях $\boldsymbol{x}_0$ будем обозначать $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$. Будем также считать, что начальный момент времени $t_0 = 0$.

Определение. Положение равновесия называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\,(\varepsilon) > 0$, что $\forall\, t \geqslant 0$ и $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ выполняется $|\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}_0, t)| < \varepsilon$.

Другими словами, положение равновесия называется устойчивым, если всегда существует область начальных отклонений $\boldsymbol{q}_0$, $\dot{\boldsymbol{q}}_0$, что все время движения система не выходит за пределы сколь угодно малой окрестности положения равновесия, имея при этом сколь угодно малые скорости (рис. 1).

Определение. Положение равновесия называется *неустойчивым*, если $\exists\, \varepsilon > 0$, что $\forall\, \delta > 0\ \exists\ |\boldsymbol{x}_0| < \delta$ и $t^* > 0$, что выполняется $|\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}_0, t^*)| \geqslant \varepsilon$.

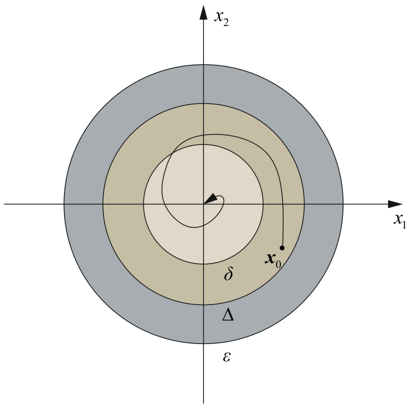

Рис. 2. Асимптотически устойчивое положение равновесия

Определение. Положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и $\exists\,\Delta > 0$, что при $|\boldsymbol{x}_0| < \Delta$ выполняется $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}_0, t) = 0$.

Иллюстрации неустойчивого и асимптотически устойчивого положений равновесия приведены на рис. 1 и 2. Заметим, что говорить об асимптотически устойчивом положении равновесия имеет смысл при рассмотрении диссипативных систем, механическая энергия которых может уменьшаться. Полная энергия консервативной системы сохраняется, а потому стремление фазовых переменных $\boldsymbol{x}$ к положению равновесия невозможно.

4. Устойчивость движений

Исследование устойчивости движения системы состоит в ответе на вопрос о характере изменений ее траекторий при малых изменениях начальных условий. Пусть движение некоторой системы задается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, t), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_{2n}]'$. Пусть $\boldsymbol{y}^*(t)$ — решение системы (2), соответствующее начальным условиям $\boldsymbol{y}_0^*$. Будем называть движение $\boldsymbol{y}^*(t)$ *невозмущенным*. Все другие решения $\boldsymbol{y}(t)$, соответствую-

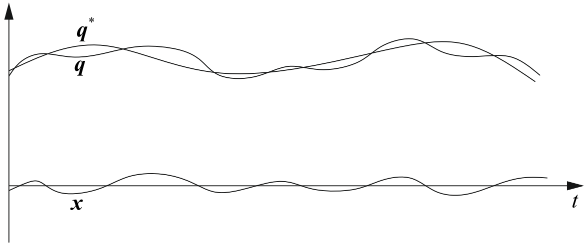

Рис. 3. Устойчивость движения и положения равновесия

щие иным начальным условиям, будем называть *возмущенными*. Разности

$$\boldsymbol{x}\,(t) = \boldsymbol{y}\,(t) - \boldsymbol{y}^*\,(t)$$

между невозмущенным и возмущенным движениями будем называть *возмущениями*. Тогда в новых переменных система уравнений (2) запишется в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^*\,(t)\,, t) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^*\,(t)\,, t). \qquad (3)$$

Полученное уравнение называется *дифференциальным уравнением возмущенного движения*. При этом решению $\boldsymbol{y}^*(t)$ системы (2) соответствует нулевое решение $\boldsymbol{x}(t) = 0$ уравнения возмущенного движения (3). Невозмущенное движение системы (2) называется *устойчивым*, *неустойчивым* или *асимптотически устойчивым*, если соответствующим свойством обладает нулевое решение системы (3). Следовательно, вопрос об устойчивости движения системы (2) можно свести к вопросу об устойчивости нулевого положения равновесия системы (3) (рис. 3), а значит, все теоремы и методы, позволяющие исследовать характер положений равновесия, применимы и для исследования характера невозмущенных движений.

Замечание. Существуют и другие определения устойчивости, кроме как по Ляпунову. Например, устойчивость по Пуанкаре (орбитальная) или по Жуковскому. Использование этих определений имеет смысл в задачах исследования устойчивости кривых в фазовом пространстве, а не функции $\boldsymbol{x}(t)$ для каждого момента времени. Из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре и Жуковскому. Обратное неверно.

Пример. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг главной оси инерции в случае Эйлера с угловой скоростью ω. Проекции угловой скорости на связанные с телом главные оси:

$$p^* = 0, \quad q^* = 0, \quad r^* = \omega. \tag{4}$$

Возмущения будут иметь вид

$$x_1 = p - p^* = p, \quad x_2 = q - q^* = q, \quad x_3 = r - r^* = r - \omega.$$

Выражая отсюда p, q и r и подставляя их в динамические уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C - B)\, qr = 0, \\ &B\dot{q} + (A - C)\, pr = 0, \\ &C\dot{r} + (B - A)\, pq = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{B - C}{A} x_2 \left(\omega + x_3\right), \\ \dot{x}_2 &= \frac{C - A}{B} x_1 \left(\omega + x_3\right), \\ \dot{x}_3 &= \frac{A - B}{C} x_1 x_2. \end{aligned}$$

Устойчивость нулевого положения равновесия полученной системы соответствует устойчивости движения (4) исходной системы (5).

5. Теоремы прямого метода Ляпунова

Для упрощения изложения далее будем рассматривать стационарные системы, полагая, что t не входит явно в правую часть (1):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

Рассмотрим дифференцируемую функцию $V\left(\boldsymbol{x}\right)$, заданную в некоторой окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$. Определим

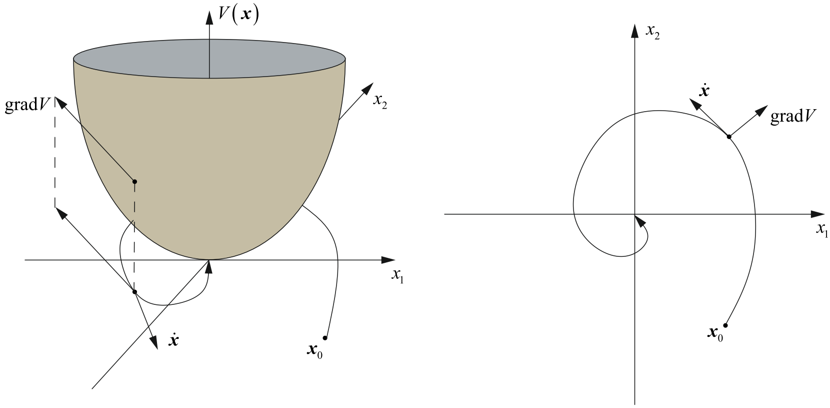

Рис. 4. Иллюстрация метода Ляпунова: слева изображена функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$, справа фазовая плоскость x_1, x_2

производную этой функции в силу уравнений движения системы (6):

$$\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}'}\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{grad}V \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Для иллюстрации метода рассмотрим случай, когда в проколотой окрестности $\boldsymbol{x} = 0$ выполняется $V > 0$ и $\dot{V}_f < 0$, $V(0) = 0$. Градиент функции V указывает направление ее роста и направлен от точки $\boldsymbol{x} = 0$ (так как это минимум функции), а вектор скорости $\dot{\boldsymbol{x}}$ направлен по касательной к траектории движения системы. Так как $\dot{V}_f < 0$, угол между векторами grad$V$ и $\dot{\boldsymbol{x}}$ лежит в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$, а значит, радиальная компонента вектора скорости $\dot{\boldsymbol{x}}$ направлена в сторону положения равновесия, что позволяет говорить о его асимптотической устойчивости. Соответствующий случай для двумерного фазового пространства показан на рис. 4. Аналогично, если $\dot{V}_f > 0$, то радиальная компонента вектора скорости $\dot{\boldsymbol{x}}$ направлена от положения равновесия, а значит, оно неустойчиво.

Сформулируем теперь некоторые теоремы прямого метода Ляпунова. Будем называть ε-окрестностью положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ шар $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$ в фазовом пространстве системы.

Теорема Ляпунова об устойчивости. *Пусть в ε-окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ существует*

непрерывно дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что
1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $0 < |\boldsymbol{x}| < \varepsilon$,
2) $V(0) = 0$,
3) $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ *при* $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$.
Тогда это положение равновесия устойчиво.

Доказательство. По условию теоремы $V(0) = 0$ — строгий минимум функции V. Выберем такую ε-окрестность, что минимум значения функции V, достигаемый на границе этой окрестности, был больше нуля: $V_\varepsilon^{\min} > 0$. Выберем δ-окрестность положения равновесия, принадлежащую ε-окрестности. Обозначим $V_\delta^{\max}$ — максимальное значение функции V, достигаемое на ее границе. В силу непрерывности функции выполняется $V_\delta^{\max} < V_\varepsilon^{\min}$. В силу условия $\dot{V}_f \leqslant 0$ получаем, что если начальные условия $\boldsymbol{x}_0$ принадлежат δ-окрестности, то

$$V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)) \leqslant V_\delta^{\max} < V_\varepsilon^{\min}.$$

Следовательно, траектория системы никогда не достигнет границы ε-окрестности, а значит, положение равновесия устойчиво. **Теорема доказана.**

Одним из следствий этой теоремы является широко известная теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости положения равновесия консервативной системы, которая, конечно, была сформулирована и доказана значительно раньше теоремы Ляпунова [1].

Теорема Лагранжа–Дирихле. *Если в положении равновесия $\boldsymbol{q} = 0$ консервативной системы потенциальная энергия $\Pi(\boldsymbol{q})$ имеет строгий минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова возьмем полную энергию системы:

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}'\mathbf{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \Pi(\boldsymbol{q}),$$

выбрав потенциальную энергию так, что $\Pi(0) = 0$, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ — положительно определенная матрица квадратичной формы кинетической энергии T. Так как потенциальная энергия по условию теоремы имеет строгий минимум в точке $\boldsymbol{q} = 0$ и $\Pi(0) = 0$, то в некоторой проколотой окрестности она положительна. Полная энергия консервативной системы сохраняется, следовательно, $\dot{V}_f = 0$, а значит, все условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены. **Теорема доказана.**

Отметим важное преимущество теоремы Лагранжа–Дирихле: для ее применения достаточно знать лишь потенциальную энергию системы, что делает ее очень удобным инструментом при анализе устойчивости положений равновесия механических систем, в то время как для использования теоремы Ляпунова об устойчивости необходимо получить уравнения движения, представленные в нормальной форме Коши.

Другое важное следствие теоремы Ляпунова об устойчивости состоит в том, что если система (6) имеет первый интеграл и этот интеграл имеет строгий экстремум в положении равновесия, то это положение равновесия устойчиво [1].

Теорема Барбашина–Красовского. *Пусть в ε-окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что*
1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $0 < |\boldsymbol{x}| < \varepsilon$,
2) $V(0) = 0$,
3) $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ *при* $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$, *причем подмножество фазового пространства, на котором выполняется* $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) = 0$, *не содержит решений системы, отличных от* $\boldsymbol{x}(t) = 0$.
Тогда это положение равновесия асимптотически устойчиво.

Условие 3) следует понимать так, что если решение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ отлично от нулевого, то есть $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$, то обязательно будет существовать момент времени $t^* > 0$, что

$$V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t^*)) < V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, 0)) = V(\boldsymbol{x}_0).$$

Доказательство. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ устойчиво, то есть $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, |\boldsymbol{x}_0| < \delta$ выполняется $|\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}_0, t)| < \varepsilon \;\forall\, t \geqslant 0$. Предположим, что в пределе решения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ не стремятся к $\boldsymbol{x} = 0$. Учитывая, что $V(0) = 0$ — строгий минимум функции и $\dot{V}_f \leqslant 0$, существуют пределы:

$$\lim_{t\to\infty} V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)) = V_\infty > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{V}_f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)) = 0. \tag{7}$$

Подмножество фазового пространства, состоящее из предельных точек решений $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$, компактно и инвариантно относительно уравнений движения (6). На этом подмножестве функция V постоянна, что противоречит условию теоремы, откуда следует, что предположение было неверным. **Теорема доказана.**

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Пусть в ε-окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что:*
1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $0 < |\boldsymbol{x}| < \varepsilon$,
2) $V(0) = 0$,
3) $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) < 0$ *при* $0 < |\boldsymbol{x}| < \varepsilon$.
Тогда это положение равновесия асимптотически устойчиво.

Доказательство. По условию теоремы в ε-окрестности $\dot{V}_f < 0$ всюду, кроме положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$. Все условия теоремы Барбашина–Красовского выполнены. **Теорема доказана.**

Существенное преимущество теоремы Барбашина–Красовского перед теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости состоит в том, что ее формулировка допускает существование интервалов времени, на которых функция Ляпунова не убывает. Эта разница зачастую оказывается важной при решении здач и приводит к невозможности использования более простой теоремы Ляпунова.

Заметим, что сформулированные выше теоремы являются лишь достаточными. Достаточное условие неустойчивости положения равновесия дается следующей теоремой.

Теорема Красовского. *Пусть в ε-окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ существует область σ, граница которой проходит через положение равновесия, и существует непрерывно дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что*
1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *в области* σ,
2) $V(\boldsymbol{x}) = 0$ *на границе области* σ,
3) $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ *в области* σ, *причем подмножество фазового пространства, на котором выполняется* $\dot{V}_f(\boldsymbol{x}) = 0$, *не содержит решений системы, отличных от* $\boldsymbol{x}(t) = 0$.
Тогда положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ устойчиво. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$, что $\forall\, |\boldsymbol{x}_0| < \delta$ выполняется $|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)| < \varepsilon \;\forall\, t \geqslant 0$. Возьмем начальное условие так, чтобы одновременно выполнялось $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ и $\boldsymbol{x}_0 \in \sigma$ (рис. 5). Тогда из

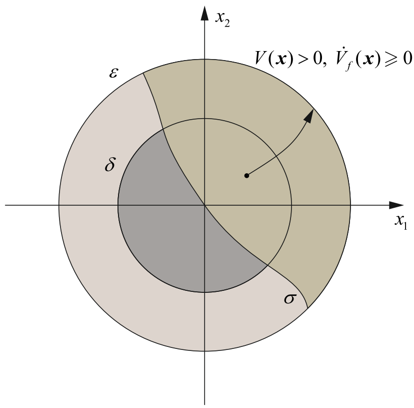

Рис. 5. Иллюстрация к теореме Красовского

условия $\dot V_f \geqslant 0$ в области σ получим

$$V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)) \geqslant V(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, 0)) = V(\boldsymbol{x}_0) > 0.$$

Предположим, что существуют пределы (7). Тогда в подмножестве фазового пространства (вновь являющимся компактным и инвариантым), состоящем из предельных точек решений $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$, функция V постоянна, что противоречит условиям теоремы. **Теорема доказана.**

Из теоремы Красовского как следствие получается следующая теорема.

Теорема Четаева о неустойчивости. *Пусть в ε-окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ существует область σ, граница которой проходит через положение равновесия, и существует непрерывно дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что*
1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ *в области* σ,
2) $V(\boldsymbol{x}) = 0$ *на границе области* σ,
3) $\dot V_f(\boldsymbol{x}) > 0$ *в области* σ.
Тогда положение равновесия неустойчиво.

6. Примеры

Пример 1. Математический маятник массы m и длины l погружен в среду с коэффициентом вязкости β. Покажем, что нижнее положение равновесия маятника асимптотически устойчиво.

Уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

можно представить в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\beta}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ — обобщенная координата и скорость маятника. В качестве функции Ляпунова возьмем полную энергию системы:

$$V = \frac{ml^2x_2^2}{2} + mgl(1 - \cos x_1).$$

Вычислим ее производную по времени в силу уравнений движения:

$$\dot{V}_f = ml^2x_2\dot{x}_2 + mgl\sin x_1\dot{x}_1 = -\beta l^2x_2^2.$$

Множество точек фазового пространства, на которых производная $\dot{V}_f = 0$, представляет собой прямую $x_2 = 0$. Теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости воспользоваться нельзя. Из подстановки $x_2 = 0$ в уравнения (8) следует, что функция Ляпунова остается все время постоянной, только если $x_1 = 0$ (решение $x_1 = \pi$ не входит в рассматриваемую окрестность нижнего положения равновесия). По теореме Барбашина–Красовского нижнее положение маятника асимптотически устойчиво.

Упражнение. Используя теорему Четаева, покажите, что верхнее положение равновесия маятника неустойчиво.

Пример 2. Математический маятник массы m и длины l вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Покажем, что при $\omega > \sqrt{g/l}$ нижнее положение равновесия неустойчиво.

Уравнения движения

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

приводятся к нормальной форме Коши:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \sin x_1 \left(\omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{l}\right).$$

Подберем функцию Ляпунова из условия

$$\dot{V}_f = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \sin x_1 \left(\omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{l}\right) \geqslant 0.$$

Если $\omega > \sqrt{g/l}$, то существует ε-окрестность точки $\boldsymbol{x} = 0$, в которой выражение в скобках больше нуля. Тогда возьмем

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \sin x_1.$$

Такой частной производной отвечает первообразная и ее полная производная по времени:

$$V = x_2 \sin x_1, \quad \dot{V}_f = x_2^2 \cos x_1 + \sin^2 x_1 \left(\omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{l}\right).$$

В качестве области σ, в которой выполняется условие $V > 0$, можно взять пересечение ε-окрестности и множества $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. При этом функция V остается постоянной только на нулевом решении системы, а значит, все условия теоремы Красовского выполнены и положение равновесия неустойчиво.

Упражнение. Используя или теорему Ляпунова об устойчивости, или теорему Лагранжа–Дирихле, докажите, что нижнее положение равновесия устойчиво при $\omega < \sqrt{g/l}$.

Пример 3. Система состоит из трех грузов с массами m_1, m_2, m_3, соединенных между собой, и с вертикальными стенками пружинами жесткости c_1, c_2, c_3, c_4, как показано на рис. 6. Грузы могут скользить по горизонтальной гладкой прямой. На первый груз действует сила вязкого трения с коэффициентом вязкости β. Покажем, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

Пусть q_1, q_2, q_3 — отклонения грузов от положения равновесия. Уравнения движения системы

$$m_1\ddot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 (q_1 - q_2) = -\beta \dot{q}_1,$$
$$m_2\ddot{q}_2 - c_2 (q_1 - q_2) + c_3 (q_2 - q_3) = 0,$$
$$m_3\ddot{q}_3 - c_3 (q_2 - q_3) + c_4 q_3 = 0.$$

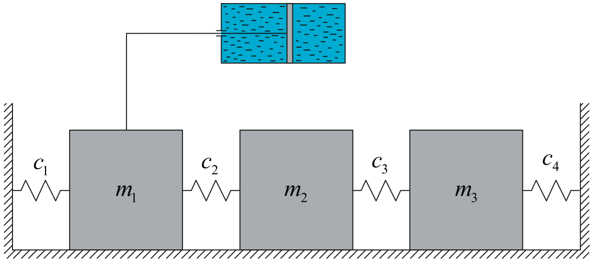

Рис. 6. Рисунок к примеру 3

Пусть $q_1(t) = 0$. Тогда из первого уравнения следует, что $q_2(t) = 0$, а это означает, что и $q_3(t) = 0$. Следовательно, первый груз не движется в том и только в том случае, когда не движутся все грузы. Если взять в качестве функции Ляпунова полную механическую энергию системы, то ее полная производная в силу уравнений движения будет равна

$$\dot{V}_f = -\beta \dot{q}_1^2.$$

С учетом рассуждений выше функция V остается постоянной, только если система находится в покое, а значит, по теореме Барбашина–Красовского положение равновесия асимптотически устойчиво. Заметим, что утверждение остается справедливым в случае, если количество грузов произвольно, при условии, что на первый груз действует сила вязкого трения.

Упражнение. Найдите величины масс грузов и жесткостей пружин, при которых положение равновесия не будет асимптотически устойчивым, если вязкая сила действует на второй груз из трех.

Пример 4. Твердое тело с главными моментами инерции $A > B > C$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Пусть управляющий момент $\boldsymbol{M} = \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{K}$ — постоянная (в системе отсчета, связанной с телом) матрица размером 3×3. Покажем, что такое управление позволяет остановить вращение твердого тела [7], если

1) $\operatorname{rang} \mathbf{K} = 3$ (управление реализовано по трем осям),
2) $\operatorname{rang} \mathbf{K} = 2$ (управление реализовано по двум осям).

Движение тела описывается динамическими уравнениями Эйлера:

$$
\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)\, qr &= M_x,\\
B\dot{q} + (A - C)\, pr &= M_y,\\
C\dot{r} + (B - A)\, pq &= M_z.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Точка в трехмерном фазовом пространстве задается компонентами p, q, r угловой скорости в главных осях, связанных с телом. В качестве функции Ляпунова возьмем кинетическую энергию $V(\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}'\hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}$, где $\hat{\mathbf{J}}$ — тензор инерции тела. Производную $\dot{V}_f$ можно вычислить при помощи теоремы об изменении кинетической энергии твердого тела:

$$
\dot{V}_f = \boldsymbol{M}'\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'\mathbf{K}'\boldsymbol{\omega}.
$$

1) Пусть $\mathbf{K} = -\mathbf{E}$ — единичная матрица, взятая с обратным знаком. Тогда $\dot{V}_f = -\omega^2$, и по теореме Ляпунова $\boldsymbol{\omega} = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (9).

2) Возьмем, например,

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Тогда $\dot{V}_f = -p^2 - (q - r)^2$. Производная $\dot{V}_f$ обнуляется на прямой $p = 0$, $q = r$, а значит, теоремой Ляпунова воспользоваться нельзя. Подставляя эти значения в уравнения движения (9), получим $(C - B)q^2 = 0$. Так как $C \neq B$, положение равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0$ асимптотически устойчиво по теореме Барбашина–Красовского.

Упражнение. Найдите управляющий момент, останавливающий вращение твердого тела в случае $\operatorname{rang}\mathbf{K} = 1$. При этом следует использовать интегралы энергии и кинетического момента, а также свойство симметрии решений $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2001. 264 с.

2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва–Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 592 с.

3. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. Москва : Изд. центр «Академия», 2010. 432 с.

4. *Айзерман М.А.* Классическая механика. Москва : Наука, 2005. 378 с.

5. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. Москва : БИНОМ, 2004. 238 с.

6. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. Изд. стереотип. Москва : Либроком, 2014. 246 с.

7. *Мейлахс А.М., Хитров Г.М.* О гашении вращения твердого тела // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 8. С. 1520–1522.

8. *Амелькин Н.И.* Теоремы прямого метода Ляпунова. `https://mipt.ru/upload/medialibrary/747/amelkin-n.i.-teoremy-pryamogo-metoda-lyapunova.pdf`

9. *Иванов А.П.* Решение задач на устойчивость. `https://mipt.ru/upload/medialibrary/514/ivanov-a.p.-reshenie-zadach-na-ustoychivost.pdf`

Теорема Барбашина–Красовского
в теории устойчивости механических систем

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель Сахаров Александр Вадимович

Редактор *Н.Е. Кобзева*.
Компьютерная верстка *А.В. Сахаров*

Подписано в печать ??.??.2022. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 20 экз. Заказ № 17.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт(национальный исследовательский
университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru